

Las ecuaciones diferenciales y su aplicación en la economía

Differential equations and their application in the economy.

José Luis Rivadeneira Pacheco ^{1*}, Marco Antonio Suriaga Sánchez ²,

Hernán Patricio Delgado Solís³

1* Colegio Alemán Humboldt Guayaquil, Guayaquil, Ecuador.

Email: josecontador82@gmail.com ORCID ID: <https://orcid.org/0000-0001-7971-5399>

2. Universidad Estatal de Guayaquil, Guayaquil, Ecuador.

Email: marco.suriagas@ug.edu.ec ORCID ID: <https://orcid.org/0000-0003-4451-7653>

3. Universidad Estatal del Sur de Manabí, Ecuador.

Email: hernan.delgado@unesum.edu.ec ORCID ID: <https://orcid.org/0000-0003-0400-700X>

Recibido: 10/10/2019

Aceptado: 07/01/2020

Resumen: La Economía es una ciencia que usa las matemáticas como herramienta de interpretación de los supuestos en los modelos y sus predicciones. Dentro de las herramientas matemáticas que sirven para aplicación de la Economía, se encuentran las ecuaciones diferenciales. En este tipo de ecuaciones, la incógnita se encuentra en una función de variable reales e intervienen la función, variable independiente y derivadas de la función incógnita. Este tipo de ecuaciones está muy relacionado con la valoración temporal de productos financieros, en función de un tanto o tasa de descuento y permite analizar el vínculo que une la variable con sus posibles soluciones, para la descripción de las variables funcionales. El objetivo de este estudio es analizar la importancia del uso de las ecuaciones diferenciales en el campo de la Economía, donde se enunciará los postulados de este tema, luego haremos una revisión de la literatura en el campo de la Economía, para finalizar con las conclusiones del presente estudio.

Palabras clave: Ecuaciones diferenciales; Economía; derivada; diferencia; solución.

Abstract: Economics is a science that uses mathematics as a tool for interpreting assumptions in models and their predictions. This science offers quantitative techniques that allow to enter the respective analyzes, considering the hypotheses and to obtain the results for interpretation. Among the mathematical tools used for the application of Economics, there are differential equations. In this type of equations, the unknown is in a real variable function and the function, independent variable and derived from the unknown function are involved. This type of equations is closely related to the temporary valuation of financial products, based on a somewhat discount rate and allows analyzing the link between the variable and its possible solutions, for the description of functional variables. The objective of this study is to analyze the importance of the use of differential equations in the field of Economics, where the postulates of this topic will be stated, then we will review the literature in the field of Economics, to conclude with the conclusions of the present study.

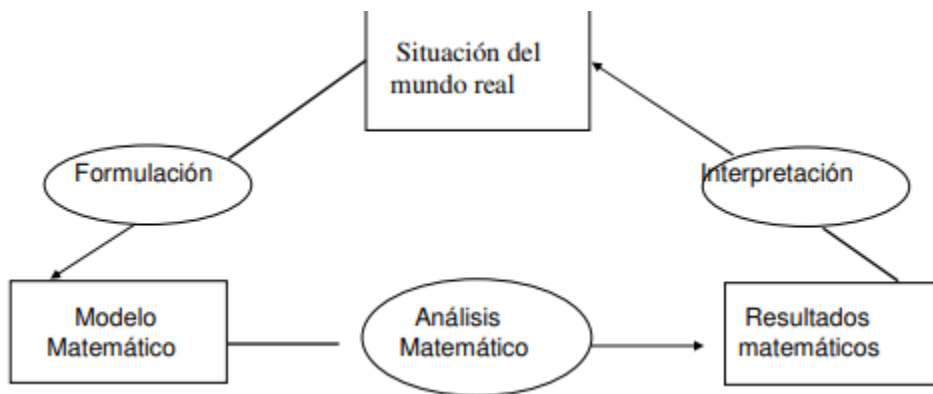
Keywords: Differential equations; Economy; derivative; difference; solution.

INTRODUCCIÓN

Las Matemáticas en la Economía y Administración deben tomar como herramientas de análisis, los métodos cuantitativos que esta ciencia ofrece, para que el investigador reconozca la naturaleza de cada problema económico, con sus hipótesis respectivas y ponerla en ejecución para el hallazgo de resultados posibles para su interpretación. (Anido & Simoniello, 1998).

Las autoras consideran que, para aplicar las Matemáticas en Economía y administración, consiste en tres fases:

- 1) Traducir la información económica al lenguaje de las matemáticas, ya que esto ayuda a obtener un modelo económico.
- 2) Tratamiento del modelo por modelos matemáticos, lo cual conllevará a hallar una solución matemática del problema planteado.
- 3) Interpretar los resultados hallados en términos de la Economía.



Fuente: (Anido & Simoniello, 1998)

Dentro de las matemáticas se debe considerar el uso del razonamiento lógico, el mismo que nos sirve para identificar los principios fundamentales, que, combinado con la Economía, esta última se relaciona con conceptos que son de naturaleza cuantitativa, donde las matemáticas tienen gran preminencia. Esto capacita al economista para poder definir las variables adecuadas en un modelo, plantear de manera correcta las hipótesis, analizar de manera lógica, y finalmente tomar las variables necesarias de un proceso de investigación.

Dentro de los problemas económicos, los mismos se representan con una variable en relación con otra u otras, los investigadores incurren en plasmar dichos problemas en un modelo matemático, el cual estudia sus causas para describirlos matemáticamente, y dentro de este campo, se lo puede expresar en la forma de una ecuación diferencial. (Anido & Simoniello, 1998)

El objetivo de este estudio es ponderar la importancia del uso de las ecuaciones diferenciales en el campo de la Economía, donde iniciaremos con un análisis teórico de este tema, luego haremos una revisión de la literatura con respecto al tema en el campo de la Economía, para finalizar con las conclusiones del trabajo en cuestión.

MARCO TEÓRICO

De acuerdo (Ventura & Elizarraraz, 2004) las ecuaciones diferenciales, son aquellas que tienen una o más derivadas de una función conocida. Se dice que es ordinaria, si la función incógnita tiene una sola variable, mientras que, si la misma depende de dos o más variables, la ecuación se denomina ecuación diferencial parcial.

El orden de una ecuación diferencial está determinado por el nivel de derivada de mayor orden que tiene la ecuación.

SIMBOLOGÍA

La simbología de la ecuación diferencial ordinaria de grado n , está representada por la forma:

$$F(x, y, y'', \dots, y^{(n)}) = 0$$

F representa una función de $n+2$ variables. Cuando se agrega más variables, de acuerdo a (Ventura & Elizarraraz, 2004), se puede representar de la forma:

$$y^{(n)} = f(x, y, y'', \dots, y^{(n-1)})$$

Para cualquier función de f de $n+1$ variables.

La solución de la ecuación diferencial en un intervalo I en cualquier función definida en aquel intervalo que logra satisfacer a la ecuación, la reduce a una identidad.

Ejemplos:

$$y''' + y'' + y' = 0$$

$$\frac{d^3 y}{dx^3} + \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + y = 0$$

CLASIFICACIÓN DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES SEGÚN LA LINEALIDAD

De acuerdo a (Morales, s/f), las ecuaciones diferenciales de la forma $y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)})$ pueden ser lineales cuando f es función lineal de $y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}$. Es decir, puede escribirse de la forma:

$$g(x) = y + y' + \dots + y^{(n-1)} + y^{(n)}$$

Cumpliendo con las siguientes características:

- 1) La variable dependiente y sus derivadas son de primer orden, es decir la potencia de todo término es de grado 1.
- 2) Cada uno de los coeficientes dependen únicamente de la variable independiente, es decir de x .

En cambio, si una ecuación diferencial es no lineal, es porque hace falta una de las derivadas entre la variable original y la derivada de mayor orden., como ejemplo se cita:

$$g(x) = y + y' + y'' + y''' \quad (\text{falta la primera derivada } y')$$

APLICACIÓN DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES EN LA ECONOMÍA

En el estudio denominado: “OFERTA Y DEMANDA: UN MODELO MATEMÁTICO CON ECUACIONES DIFERENCIALES”, (Escobar, 2010), plantea el modelo de oferta y demanda para obtener una solución analítica y gráfica de ambas ecuaciones. Empieza definiendo los términos de la ecuación con ecuaciones diferenciales, para luego resolver ejercicios de aplicación. El autor inicia aplicando el precio de equilibrio de oferta y demanda, como lo indica la teoría neoclásica, y dentro del modelo de competencia perfecta, interactúa con los tres posibles escenarios:

Caso 1.- Precio constante,

Caso 2.- Precio de equilibrio,

Caso 3.- Inflación continua.

Dentro del estudio denominado: “Ecuaciones diferenciales y en diferencias aplicadas a los conceptos económicos y financieros”, (Tenorio, Caraballo, Paralera, & Contreras, 2013) toman como herramienta matemática, las ecuaciones diferenciales y en diferencia para el análisis en los casos económicos y financieros que se puede aplicar., cuyo objetivo es de mostrar el surgimiento de esta herramienta para la resolución de problemas relativos a sistemas dinámicos, y enfatizar el hecho de que las investigaciones tanto económicas como financieras, deben tomar en cuenta las ecuaciones diferenciales y en diferencia.

Este estudio resalta la aportación de Newton dentro de las integrales, ya que utiliza las ecuaciones diferenciales más sencillas, introduciendo las primeras ecuaciones diferenciales para el estudio de los movimientos de planetas y sobre temáticas referentes a la Física, basado en la dinámica de los cuerpos, tomando en cuenta a las variables como cambiantes que fluían con el tiempo, calculando sus razones de cambio a través de esta variable. En el caso de Leibniz, concluye de igual forma de Newton sobre el cálculo integral y diferencial, ambos siendo reconocidos como los pioneros en esta materia. Leibniz por su parte, introduce en 1691 y 1693 el método de separación de variables, reducción de ecuaciones homogéneas a separables y el procedimiento de resolución de ecuaciones lineales de primer orden.

Euler (1728) por su parte introduce dos técnicas referentes al tema: la sustitución en ciertas ecuaciones diferenciales, y el método de los coeficientes indeterminados, y aunque por vía de ejemplo descubre el método de resolución de ecuaciones diferenciales lineales mediante multiplicar un factor de integración, base para la teoría de ecuaciones diferenciales lineales.

(Tenorio, et. al., 2013) consideran el uso de esta herramienta en el mundo de las finanzas, citando como ejemplo la fijación de los precios de las opciones europeas y futuras y sus calibraciones. En esta temática, el dominio acotado considerado es $(0, T)$ con una condición final en el instante $t=T$. Dentro de la fijación de precios de opciones, se utiliza el modelo Black-Scholes (1973), el mismo que trabaja una ecuación en derivadas parciales, sin disponer las hipótesis que se necesitan para los datos para derivar. Este tipo de modelo considera un activo con riesgo y sin riesgo cuyos precios en t , son S_t y S_t^0 , para satisfacer a las ecuaciones:

$$dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dB_t) \quad \text{y} \quad dS_t^0 = rS_t^0 dt$$

Siendo B_t , movimiento browniano estándar, μ la media de retorno de la inversión, r la tasa de interés y σ la volatilidad. Cuando los tres parámetros analizados, no son constantes, sino que dependen de t y S , entonces se trabaja con un proceso estocástico que viene determinado por una ecuación diferencial estocástica con una expresión similar a la anteriormente

indicada. Esta aproximación se ha usado en opciones europeas, americanas y asiáticas, en opciones basket y de barrera, y en opciones sobre máximo y sobre promedio. (Tenorio et al, 2013).

Dentro del campo macroeconómico, se mide el producto interno bruto como la solución a la ecuación diferencial planteada

$$\frac{dx}{dt}(t) = gx(t)$$

de la siguiente manera: $\frac{dx}{dt}(t) = gx(t)$, el cual $x(t)$ representa la tasa de cambio del estado actual en el tiempo t , la cual se expresa proporcionalmente al estado en aquel instante con g como una constante proporcional.

En lo que respecta al campo microeconómico, cuando una empresa quiere maximizar el valor actual de todos los flujos de dinero futuros, se aplica el uso de ecuaciones diferenciales, citando a (Gould, 1968):

$$e^{-R(t)} \left(P(t) \frac{dF}{dL}(K, L) - w(t) \right) = 0$$

$$e^{-R(t)} \left(P(t) \frac{dF}{dL}(K, L) - (r + \delta) \frac{dC}{dI}(I) + \left(\frac{d^2K}{dt^2}(t) + \delta \frac{dK}{dt}(t) \right) \frac{d^2C}{dt^2}(I) \right) = 0$$

Donde:

$P(t)$: precio de la producción en t

$w(t)$: salario medio en t

$L(t)$: mano de obra en t

$K(t)$: Capital en t

$C(I)$: Costo de invertir en capital social dada una tasa I de inversión bruta

$F(K, L)$ = Función de producción en términos de fuerza laboral y capital.

Otro de los ejemplos para aplicación de las ecuaciones diferenciales en la Economía, se lo puede hallar en la determinación de la oferta y demanda. De acuerdo con (Escobar, 2010), se fija la función precio de un bien en el tiempo $p = p(t)$. Para definir la demanda, la cual representa los bienes que consumen los individuos, se define por la función $D = D(t)$. Esta función depende a más allá del tiempo, también de los cambios o variaciones de los mismos, la cual se define como $p' = p'(t)$. Por tanto, la función de Demanda queda expresada de la siguiente manera:

$$D = f(p(t), p'(t))$$

A su vez, las unidades que los productores tienen disponible para producir en cualquier t , se denomina oferta y se representa por $S = S(t)$. La oferta al igual que la demanda, depende de $p = p(t)$ y $p' = p'(t)$, y se define como:

$$S = f(p(t), p'(t))$$

Los supuestos que hacen que el modelo tenga validez dentro de una economía, son los siguientes:

1. Economía competitiva y libre, es decir los compradores y productores compiten para definir precios.

2. Oferta a plena capacidad, es decir que la tasa del cambio de precio sirve para definir el nivel de oferta disponible a través del tiempo.
3. Los precios de otros bienes no se consideran
4. Los precios de oferta y demanda son valores continuos.

Con estos supuestos, se puede en cualquier tiempo t , con precio $p(t)$, determinarse el punto de equilibrio de oferta y demanda en t , es decir:

$$f(p(t), p'(t)) = g(p(t), p'(t))$$

Teniendo una ecuación de primer orden con función desconocida $p = p(t)$.

Para (Reyes, 2012), la aplicación de las ecuaciones diferenciales se enfoca a la economía lógica, lo cual puede medirse en una población de peces debido a la introducción de una especie foránea, esto hace modificar la población original y desarrollar nuevas formas, ya que existe una especie que se está reproduciendo. Para el ejemplo, que crece de manera exponencial, se considera una población inicial de 50.000 peces y más adelante, se reproduce en 75.000. Este crecimiento está modelado de la siguiente manera:

$$\frac{dP}{dt} = kP = kP_0 e^{kt}$$

Bajo esta modelización, se busca:

- a) La solución general de la ecuación,
- b) La solución particular del modelo,
- c) La población existente en t años,
- d) El tiempo en que la población pueda reproducirse en n peces.

CONCLUSIONES

Dentro de las herramientas matemáticas que sirven para aplicación de la Economía, se encuentran las ecuaciones diferenciales. En este tipo de ecuaciones, la incógnita se encuentra en una función de variable reales e intervienen la función, variable independiente y derivadas de la función incógnita. Este tipo de ecuaciones está muy relacionado con la valoración temporal de productos financieros, en función de un tanto o tasa de descuento y permite analizar el vínculo que una variable con sus posibles soluciones, para la descripción de las variables funcionales.

Tal como lo indica la epistemología, la Economía es una ciencia que debe ser entendida con métodos analíticos cuantitativos, los cuales nos permiten interpretar resultados, realizar comparaciones para tomar decisiones clave dentro de este campo que afecta directamente a la sociedad.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Anido, M., & Simoniello, A. (1998). LAS ECUACIONES DIFERENCIALES COMO HERRAMIENTAS DISPARADORAS DE UN TRABAJO DE FORMACION DOCENTE. Terceras Jornadas Investigaciones en la Facultad de Ciencias Económicas y Estadística, (págs. 192-201). Rosario. Recuperado el 19 de septiembre de 2019, de <https://core.ac.uk/download/pdf/90647189.pdf>.
- Escobar, H. (2010). OFERTA Y DEMANDA: UN MODELO MATEMÁTICO CON ECUACIONES DIFERENCIALES. TENDENCIAS, XI (2), 7-34. Recuperado el 19 de septiembre de 2019, de <https://dialnet.unirioja.es/descarga/articulo/3640667.pdf>.
- Morales, L. (s/f). Conceptos básicos de Ecuaciones diferenciales. Recuperado el 19 de septiembre de 2019, de <https://luismoralescastrillo.jimdo.com/app/download/9839987952/Conceptos+basicos.pdf?t=1490140256>.
- Reyes, G. (2012). Modelos dinámicos y ecuaciones diferenciales en gestión de empresas. Rosario, Colombia: Universidad del Rosario. Facultad de Administración. Recuperado el 20 de septiembre de 2019, de https://www.urosario.edu.co/urosario_files/b8/b8887954-9f29-4bd1-9a19-94a0b050dc16.pdf.
- Tenorio, Á., Caraballo, M., Paralera, C., & Contreras, I. (diciembre de 2013). Ecuaciones diferenciales y en diferencias aplicadas a los conceptos económicos y financieros. REVISTA DE METODOS CUANTITATIVOS PARA LA ECONOMIA Y EMPRESA, 165-169. Recuperado el 19 de septiembre de 2019, de URL: <http://www.upo.es/RevMetQuant/art.php?id=83>.
- Ventura, J., & Elizarraraz, D. (2004). Ecuaciones Diferenciales Técnicas de solución y aplicaciones (1 ed., Vol. 1). Tamaulipas, México. Recuperado el 15 de septiembre de 2019, de <http://galois.azc.uam.mx/mate/EDO/EcuacionesDif.pdf>.